

有界线性算子的 (R_1) 性质及其摄动*

赵小鹏¹, 戴磊¹, 曹小红²

1. 渭南师范学院数学与统计学院, 陕西 渭南 714099
2. 陕西师范大学数学与统计学院, 陕西 西安 710119

摘要: 利用拓扑一致降标诱导的谱集, 给出了算子 T 及算子函数 $p(T)$ 有 (R_1) 性质的等价性刻画。另外, 上三角算子矩阵的 (R_1) 性质的稳定性得到了研究。

关键词: 拓扑一致降标; (R_1) 性质; 谱

中图分类号: O177.2 **文献标志码:** A **文章编号:** 2097-0137 (2022) 06-0172-08

The property (R_1) and its perturbations for bounded linear operators

ZHAO Xiaopeng¹, DAI Lei¹, CAO Xiaohong²

1. School of Mathematics and Statistics, Weinan Normal University, Weinan 714099, China
2. School of Mathematics and Statistics, Shaanxi Normal University, Xi'an 710119, China

Abstract: Using the spectrum introduced by the property of topological uniform descent, we give the necessary and sufficient conditions for which the property (R_1) holds for bounded linear operators T and operator functions $p(T)$. In addition, the perturbations of property (R_1) for upper triangular operator matrices is considered.

Key words: topological uniform descent; property (R_1) ; spectrum

1909年, Weyl^[1]在检查 Hermitian 算子的所有紧扰动的谱集时发现, 自伴算子的 Weyl 谱刚好为它的谱集中非孤立的有限维的特征根, 此结论后来被称为 Weyl 定理。20 世纪 90 年代, Weyl 定理备受关注, 国内外许多学者对 Weyl 定理进行了变形和推广^[2-4]。 (R_1) 性质是 Weyl 型定理的一种变形, 近期得到广泛关注^[5-8]。本文主要利用拓扑一致降标性质研究了有界线性算子的 (R_1) 性质。

1 预备知识

在本文中, 用 \mathbb{C} 表示复数域, \mathbb{N} 表示非负整数的全体, H 表示无限维复可分 Hilbert 空间, $B(H)$ 表示 H 上的有界线性算子的全体。设 $T \in B(H)$, 如果值域 $R(T)$ 为闭集且零空间 $N(T)$ 的维数 $n(T) < +\infty$, 则称 T 是上半 Fredholm 算子; 若 $R(T)$ 的余维数 $d(T) < +\infty$, 称 T 是下半 Fredholm 算子; 如果 $n(T) < +\infty$ 且 $d(T) < +\infty$, 则称 T 是 Fredholm 算子。特别地, 如果 T 是上半 Fredholm 算子且 $n(T) = 0$, 则称 T 是下有界算子。上半 Fredholm 算子或下半 Fredholm 算子统称半 Fredholm 算子。当 T 是半 Fredholm 算子时, 定义 $\text{ind}(T) = n(T) - d(T)$ 为 T 的指标。指标为零的 Fredholm 算子称为 Weyl 算子。算子 T 的升标 $\text{asc}(T)$ 定义为 $\text{asc}(T) = \inf \{n \in \mathbb{N} : N(T^n) = N(T^{n+1})\}$, 当这样的整数不存在时, 记 $\text{asc}(T) = +\infty$; 算子 T 的降标 $\text{desc}(T)$ 定义为

* 收稿日期: 2021-01-15 录用日期: 2021-09-02 网络首发日期: 2022-07-08

基金项目: 陕西省自然科学基金(2021JM-519); 渭南师范学院人才项目(2021RC02)

作者简介: 赵小鹏(1968年生), 男; 研究方向: 算子理论与算子代数; E-mail: zxp@wnu.edu.cn

通信作者: 曹小红(1972年生), 女; 研究方向: 算子理论与算子代数; E-mail: xiaohongcao@snnu.edu.cn

$\text{desc}(T) = \inf \{n \in \mathbb{N} : R(T^n) = R(T^{n+1})\}$, 当这样的整数不存在时, 记 $\text{desc}(T) = +\infty$. 当 $\text{asc}(T)$ 和 $\text{desc}(T)$ 均有限时, 可以证明 $\text{asc}(T) = \text{desc}(T)$. 称算子 T 是 Drazin 可逆的, 若 $\text{asc}(T) = \text{desc}(T) < +\infty$. 若 T 是 Drazin 可逆且 $n(T) < +\infty$ 或 $d(T) < +\infty$, 称 T 是 Browder 算子. 可以证明 T 为 Browder 算子当且仅当 T 为上半(或者下半) Fredholm 算子且升标和降标均有限; 也可证明 T 为 Browder 算子当且仅当 T 为上半(或者下半) Fredholm 算子且当 $|\lambda| > 0$ 充分小时, $T - \lambda I$ 可逆.

设 $T \in B(H)$, 定义 T 的谱集 $\sigma(T)$ 、逼近点谱 $\sigma_a(T)$ 、Browder 谱 $\sigma_b(T)$ 、Drazin 谱 $\sigma_D(T)$ 分别为 $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ 不可逆}\}$, $\sigma_a(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ 不为下有界算子}\}$, $\sigma_b(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ 不为 Browder 算子}\}$, $\sigma_D(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ 不为 Drazin 可逆的}\}$. 记 $\rho(T) = \mathbb{C} \setminus \sigma(T)$ 、 $\rho_a(T) = \mathbb{C} \setminus \sigma_a(T)$ 、 $\rho_b(T) = \mathbb{C} \setminus \sigma_b(T)$ 、 $\rho_D(T) = \mathbb{C} \setminus \sigma_D(T)$. 令 $\rho_{ab}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ 是上半 Fredholm 算子且 } \text{asc}(T - \lambda I) < +\infty\}$. 用 $\sigma_{ab}(T) = \mathbb{C} \setminus \rho_{ab}(T)$ 表示算子 T 的 Browder 本质逼近点谱. $\lambda \in \rho_{ab}(T)$ 当且仅当 $T - \lambda I$ 为半 Fredholm 算子且当 $0 < |\mu - \lambda|$ 充分小时, $T - \mu I$ 为下有界算子.

记 $\sigma_c(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : R(T - \lambda I) \text{ 不闭}\}$, 令 $\rho_c(T) = \mathbb{C} \setminus \sigma_c(T)$. 算子 T 的正规特征值的全体记为 $\sigma_0(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_b(T)$. 设 E 为复数集 \mathbb{C} 的子集, 则分别定义 $\text{iso } E$, $\text{acc } E$, ∂E 和 $\text{int } E$ 为集合 E 的孤立点的全体, 聚点的全体, 边界点的全体和内点的全体.

设 $T \in B(H)$, 称 T 有 (R_1) 性质, 如果

$$\sigma_a(T) \setminus \sigma_{ab}(T) \subseteq \pi_{00}(T),$$

其中 $\pi_{00}(T) = \{\lambda \in \text{iso } \sigma(T) : 0 < \dim N(T - \lambda I) < +\infty\}$. 称 T 有 (R) 性质, 如果

$$\sigma_a(T) \setminus \sigma_{ab}(T) = \pi_{00}(T).$$

若 $\lambda_0 \in \sigma(T) \cap \sigma_D(T)$, 称 λ_0 为 T 的极点. 易知, 如果 $T - \lambda_0 I$ 是 Drazin 可逆且 $n(T - \lambda_0 I) < +\infty$, 则 $T - \lambda_0 I$ 是 Browder 算子.

拓扑一致降标对算子谱的研究起到重要作用^[8-9]. 当 T 为上半(或下半) Fredholm 算子时, T 有拓扑一致降标性质. 如果 T 有拓扑一致降标, 则 T 有如下性质.

引理 1^[8-9] 设 $T \in B(H)$, $\lambda \in \partial \sigma(T)$. 如果 $T - \lambda I$ 有拓扑一致降标, 则 λ 是 T 的一个极点.

本文首先利用拓扑一致降标性质给出了有界线性算子及其函数有 (R_1) 性质的等价刻画; 其次通过拓扑一致降标性质, 给出了算子函数有 (R_1) 性质的等价条件; 之后, 上三角算子矩阵的 (R_1) 性质的稳定性得到了研究.

2 算子及其函数的 (R_1) 性质的判定

令 $\rho_\tau(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ 有拓扑一致降标性质}\}$. 记 $\sigma_\tau(T) = \mathbb{C} \setminus \rho_\tau(T)$. 易知 $\rho_{SF}(T) \subseteq \rho_\tau(T)$, 其中 $\rho_{SF}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ 为上半或者下半 Fredholm 算子}\}$. 由引理 1 得

$$\rho_b(T) = \rho_\tau(T) \cup \partial \sigma(T) \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : n(T - \lambda I) < +\infty\} \text{ 且 } \rho_D(T) = \rho_\tau(T) \cup \partial \sigma(T).$$

定理 1 设 $T \in B(H)$, 则 T 有 (R_1) 性质的充要条件为

$$\begin{aligned} \sigma_b(T) &= \sigma_\tau(T) \cup \text{acc } \sigma_a(T) \cup [\text{acc } \{\lambda \in \mathbb{C} : n(T - \lambda I) < d(T - \lambda I)\} \cap \sigma_c(T)] \\ &\quad \cup [\rho_a(T) \cap \sigma(T)] \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : n(T - \lambda I) = +\infty\}. \end{aligned}$$

证明 充分性. 由于

$$[\sigma_a(T) \setminus \sigma_{ab}(T)] \cap [\rho_a(T) \cap \sigma(T)] = \emptyset, \quad [\sigma_a(T) \setminus \sigma_{ab}(T)] \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : n(T - \lambda I) = +\infty\} = \emptyset,$$

$$[\sigma_a(T) \setminus \sigma_{ab}(T)] \cap \sigma_\tau(T) = \emptyset, \quad [\sigma_a(T) \setminus \sigma_{ab}(T)] \cap \text{acc } \sigma_a(T) = \emptyset,$$

$$[\sigma_a(T) \setminus \sigma_{ab}(T)] \cap [\text{acc } \{\lambda \in \mathbb{C} : n(T - \lambda I) < d(T - \lambda I)\} \cap \sigma_c(T)] = \emptyset,$$

故 $[\sigma_a(T) \setminus \sigma_{ab}(T)] \cap \sigma_b(T) = \emptyset$, 即 $[\sigma_a(T) \setminus \sigma_{ab}(T)] \subseteq \rho_b(T)$, 于是 $\sigma_a(T) \setminus \sigma_{ab}(T) \subseteq \pi_{00}(T)$, 即 T 有 (R_1) 性质.

必要性. 不妨取 $\lambda_0 \in \sigma(T)$ 且 $\lambda_0 \notin \sigma_\tau(T) \cup \text{acc } \sigma_a(T) \cup [\text{acc } \{\lambda \in \mathbb{C} : n(T - \lambda I) < d(T - \lambda I)\} \cap \sigma_c(T)] \cup [\rho_a(T) \cap \sigma(T)] \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : n(T - \lambda I) = +\infty\}$. 于是 $\lambda_0 \in \sigma_a(T)$. 由 $\lambda_0 \notin \text{acc } \sigma_a(T)$ 知存在 $\varepsilon > 0$ 使得当 $0 < |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$ 时, $T - \lambda I$ 均为下有界算子. 又由 $\lambda_0 \notin \text{acc } \{\lambda \in \mathbb{C} : n(T - \lambda I) < d(T - \lambda I)\} \cap \sigma_c(T)$, 分两种

情况讨论:

(i) $\lambda_0 \notin \text{acc}\{\lambda \in \mathbb{C}: n(T - \lambda I) < d(T - \lambda I)\}$.

此时存在 $\varepsilon' < \varepsilon$, 使得当 $0 < |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon'$ 时, $n(T - \lambda I) \geq d(T - \lambda I)$. 又由于 $T - \lambda I$ 为下有界算子, 于是当 $0 < |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon'$ 时 $T - \lambda I$ 可逆, 即 $\lambda_0 \in \text{iso}\sigma(T)$. 由引理 1 可知 $T - \lambda_0 I$ 为 Drazin 可逆. 又由 $n(T - \lambda_0 I) < +\infty$, 故 $\lambda_0 \notin \sigma_b(T)$.

(ii) $\lambda_0 \notin \sigma_c(T)$.

结合 $n(T - \lambda_0 I) < +\infty$ 知 $T - \lambda_0 I$ 是上半 Fredholm 算子. 又由于 $\lambda_0 \in \text{iso}\sigma_a(T)$, 于是 $T - \lambda_0 I$ 的升标有限, 即 $\lambda_0 \in \sigma_a(T) \setminus \sigma_{ab}(T)$. 由条件 T 有 (R_1) 性质, 故 $\lambda_0 \in \pi_{00}(T)$, 所以 $\lambda_0 \notin \sigma_b(T)$.

这样我们就证明了 $\sigma_b(T) \subseteq \sigma_\tau(T) \cup \text{acc}\sigma_a(T) \cup [\text{acc}\{\lambda \in \mathbb{C}: n(T - \lambda I) < d(T - \lambda I)\} \cap \sigma_c(T)] \cup [\rho_a(T) \cap \sigma(T)] \cup \{\lambda \in \mathbb{C}: n(T - \lambda I) = +\infty\}$, 反包含显然成立. 于是 $\sigma_b(T) = \sigma_\tau(T) \cup \text{acc}\sigma_a(T) \cup [\text{acc}\{\lambda \in \mathbb{C}: n(T - \lambda I) < d(T - \lambda I)\} \cap \sigma_c(T)] \cup [\rho_a(T) \cap \sigma(T)] \cup \{\lambda \in \mathbb{C}: n(T - \lambda I) = +\infty\}$. 证毕

在定理 1 中, 将 $[\rho_a(T) \cap \sigma(T)]$ 改为 $\{\lambda \in \mathbb{C}: n(T - \lambda I) = 0\}$, 可以有下列结论:

推论 1 设 $T \in B(H)$, 则下列叙述等价:

(i) T 有 (R_1) 性质;

(ii) $\sigma_b(T) = \sigma_\tau(T) \cup \text{acc}\sigma_a(T) \cup [\text{acc}\{\lambda \in \mathbb{C}: n(T - \lambda I) < d(T - \lambda I)\} \cap \sigma_c(T)] \cup \{\lambda \in \sigma(T): n(T - \lambda I) = 0\} \cup \{\lambda \in \mathbb{C}: n(T - \lambda I) = +\infty\}$;

(iii) $\rho_\tau(T) \subseteq \rho_b(T) \cup \text{acc}\sigma_a(T) \cup [\text{acc}\{\lambda \in \mathbb{C}: n(T - \lambda I) < d(T - \lambda I)\} \cap \sigma_c(T)] \cup \{\lambda \in \sigma(T): n(T - \lambda I) = 0\} \cup \{\lambda \in \mathbb{C}: n(T - \lambda I) = +\infty\}$.

证明 (i) \Rightarrow (ii). 由定理 1 知, 当 T 有 (R_1) 性质时, $\sigma_b(T) = \sigma_\tau(T) \cup \text{acc}\sigma_a(T) \cup [\text{acc}\{\lambda \in \mathbb{C}: n(T - \lambda I) < d(T - \lambda I)\} \cap \sigma_c(T)] \cup [\rho_a(T) \cap \sigma(T)] \cup \{\lambda \in \mathbb{C}: n(T - \lambda I) = +\infty\}$. 因 $\rho_a(T) \cap \sigma(T) \subseteq \{\lambda \in \sigma(T): n(T - \lambda I) = 0\}$, 所以

$$\sigma_b(T) \subseteq \sigma_\tau(T) \cup \text{acc}\sigma_a(T) \cup [\text{acc}\{\lambda \in \mathbb{C}: n(T - \lambda I) < d(T - \lambda I)\} \cap \sigma_c(T)] \cup \{\lambda \in \sigma(T): n(T - \lambda I) = 0\} \cup \{\lambda \in \mathbb{C}: n(T - \lambda I) = +\infty\}.$$

反包含显然成立. 于是(ii)成立.

(ii) \Rightarrow (iii). 由(ii)知(iii)显然成立.

(iii) \Rightarrow (i). 因 $[\sigma_a(T) \setminus \sigma_{ab}(T)] \subseteq \rho_\tau(T)$ 且 $[\sigma_a(T) \setminus \sigma_{ab}(T)] \cap [\text{acc}\sigma_a(T) \cup [\text{acc}\{\lambda \in \mathbb{C}: n(T - \lambda I) < d(T - \lambda I)\} \cap \sigma_c(T)] \cup \{\lambda \in \sigma(T): n(T - \lambda I) = 0\} \cup \{\lambda \in \mathbb{C}: n(T - \lambda I) = +\infty\}] = \emptyset$, 故 $\sigma_a(T) \setminus \sigma_{ab}(T) \subseteq \rho_b(T)$, 所以 $\sigma_a(T) \setminus \sigma_{ab}(T) \subseteq \pi_{00}(T)$, 即 T 有 (R_1) 性质. 证毕

在定理 1 和推论 1 中, 将 $\text{acc}\sigma_a(T)$ 用 $\text{int}\sigma_a(T)$ 替换, 结论同样成立.

推论 2 设 $T \in B(H)$, 则下列叙述等价:

(i) T 有 (R_1) 性质;

(ii) $\sigma_b(T) = \sigma_\tau(T) \cup \text{int}\sigma_a(T) \cup [\text{acc}\{\lambda \in \mathbb{C}: n(T - \lambda I) < d(T - \lambda I)\} \cap \sigma_c(T)] \cup [\rho_a(T) \cap \sigma(T)] \cup \{\lambda \in \mathbb{C}: n(T - \lambda I) = +\infty\}$;

(iii) $\sigma_b(T) = \sigma_\tau(T) \cup \text{int}\sigma_a(T) \cup [\text{acc}\{\lambda \in \mathbb{C}: n(T - \lambda I) < d(T - \lambda I)\} \cap \sigma_c(T)] \cup \{\lambda \in \sigma(T): n(T - \lambda I) = 0\} \cup \{\lambda \in \mathbb{C}: n(T - \lambda I) = +\infty\}$;

(iv) $\rho_\tau(T) \subseteq \rho_b(T) \cup \text{int}\sigma_a(T) \cup [\text{acc}\{\lambda \in \mathbb{C}: n(T - \lambda I) < d(T - \lambda I)\} \cap \sigma_c(T)] \cup \{\lambda \in \sigma(T): n(T - \lambda I) = 0\} \cup \{\lambda \in \mathbb{C}: n(T - \lambda I) = +\infty\}$.

证明 (i) \Rightarrow (ii). $\sigma_b(T) \supseteq \sigma_\tau(T) \cup \text{int}\sigma_a(T) \cup [\text{acc}\{\lambda \in \mathbb{C}: n(T - \lambda I) < d(T - \lambda I)\} \cap \sigma_c(T)] \cup [\rho_a(T) \cap \sigma(T)] \cup \{\lambda \in \mathbb{C}: n(T - \lambda I) = +\infty\}$ 显然, 只需证明反包含成立. 任意 $\lambda_0 \notin \sigma_\tau(T) \cup \text{int}\sigma_a(T) \cup [\text{acc}\{\lambda \in \mathbb{C}: n(T - \lambda I) < d(T - \lambda I)\} \cap \sigma_c(T)] \cup [\rho_a(T) \cap \sigma(T)] \cup \{\lambda \in \mathbb{C}: n(T - \lambda I) = +\infty\}$. 不妨设 $\lambda_0 \in \sigma(T)$, 于是 $\lambda_0 \in \sigma_a(T)$, 因 $\lambda_0 \notin \text{int}\sigma_a(T)$ 且 $\sigma_a(T)$ 是闭集, 所以 $\lambda_0 \in \partial\sigma_a(T)$. 又 $\lambda_0 \notin \text{acc}\{\lambda \in \mathbb{C}: n(T - \lambda I) < d(T - \lambda I)\} \cap \sigma_c(T)$. 于是

① $\lambda_0 \notin \text{acc}\{\lambda \in \mathbb{C}: n(T - \lambda I) < d(T - \lambda I)\}$, 存在 $\varepsilon_0 > 0$, 当 $0 < |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon_0$ 时, $d(T - \lambda I) \leq n(T -$

λI). 而 $\lambda_0 \in \partial\sigma_a(T)$. 任意 $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, 存在 $\mu \in B^{\circ}(\lambda_0, \varepsilon)$, $T - \mu I$ 是可逆的, 因此 $\lambda_0 \in \partial\sigma(T)$, 再根据 $n(T - \lambda_0 I) < +\infty$ 且 $\lambda_0 \in \rho_{\tau}(T)$, 于是由引理1知 $\lambda_0 \in \rho_b(T)$.

② $\lambda_0 \notin \sigma_c(T)$, 再结合 $n(T - \lambda_0 I) < +\infty$, 故 $T - \lambda_0 I$ 是上半 Fredholm 算子, 因 $\lambda_0 \in \partial\sigma_a(T)$, 则根据 Fredholm 算子摄动定理知 $\lambda_0 \in \text{iso } \sigma_a(T)$, 由定理1证明可知结论成立。

(ii) \Rightarrow (i). 若 (ii) 成立, 由于 $\text{int } \sigma_a(T) \subseteq \text{acc } \sigma_a(T)$, 易证 $\sigma_b(T) = \sigma_{\tau}(T) \cup \text{acc } \sigma_a(T) \cup [\text{acc } \{\lambda \in \mathbb{C} : n(T - \lambda I) < d(T - \lambda I)\} \cap \sigma_c(T)] \cup [\rho_a(T) \cap \sigma(T)] \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : n(T - \lambda I) = +\infty\}$. 再根据定理1可知 (i) 成立。

(i) \Leftrightarrow (iii) \Leftrightarrow (iv). 根据 $\text{int } \sigma_a(T) \subseteq \text{acc } \sigma_a(T)$ 和推论1可证。 证毕

由定理1可知, 当 $\sigma_b(T) = \sigma_{\tau}(T) \cup \text{acc } \sigma_a(T) \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : n(T - \lambda I) = +\infty\}$ 时, T 有 (R_1) 性质, 但是反之不成立。例如:

设 $T \in B(\ell^2)$ 定义为

$$T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, x_3, \dots),$$

则 $\sigma_a(T) = \sigma_{ab}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$, $\pi_{00}(T) = \emptyset$. 故 $\sigma_a(T) \setminus \sigma_{ab}(T) \subseteq \pi_{00}(T)$, 即 T 有 (R_1) 性质。但是 $\sigma_b(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}$, $\sigma_{\tau}(T) = \text{acc } \sigma_a(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$, $\{\lambda \in \mathbb{C} : n(T - \lambda I) = +\infty\} = \emptyset$, 即 $\sigma_b(T) \neq \sigma_{\tau}(T) \cup \text{acc } \sigma_a(T) \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : n(T - \lambda I) = +\infty\}$.

推论3 设 $T \in B(H)$, 则 T 有 (R_1) 性质且 $\sigma(T) = \sigma_a(T)$ 的充要条件为 $\sigma_b(T) = \sigma_{\tau}(T) \cup \text{acc } \sigma_a(T) \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : n(T - \lambda I) = +\infty\}$.

证明 必要性。由定理1知, 当 T 有 (R_1) 性质时, $\sigma_b(T) = \sigma_{\tau}(T) \cup \text{acc } \sigma_a(T) \cup [\text{acc } \{\lambda \in \mathbb{C} : n(T - \lambda I) < d(T - \lambda I)\} \cap \sigma_c(T)] \cup [\rho_a(T) \cap \sigma(T)] \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : n(T - \lambda I) = +\infty\}$. 因 $\sigma(T) = \sigma_a(T)$, 所以 $[\text{acc } \{\lambda \in \mathbb{C} : n(T - \lambda I) < d(T - \lambda I)\} \cap \sigma_c(T)] \subseteq \text{acc } \sigma(T) = \text{acc } \sigma_a(T)$, $\rho_a(T) \cap \sigma(T) = \emptyset$, 从而 $\sigma_b(T) = \sigma_{\tau}(T) \cup \text{acc } \sigma_a(T) \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : n(T - \lambda I) = +\infty\}$.

充分性。只需证明 $\sigma(T) \subseteq \sigma_a(T)$. 因 $\rho_a(T) \cap \sigma_b(T) = \rho_a(T) \cap [\sigma_{\tau}(T) \cup \text{acc } \sigma_a(T) \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : n(T - \lambda I) = +\infty\}] = \emptyset$, 所以 $\rho_a(T) \subseteq \rho_b(T)$, 即 $\rho_a(T) \subseteq \rho(T)$. 证毕

下面讨论算子函数的 (R_1) 性质。当 T 有 (R_1) 性质时, 并不能推出其算子函数也有 (R_1) 性质。例如, 设 $A, B \in B(\ell^2)$ 定义为

$$A(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, x_3, \dots), \quad B(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_2, x_3, \dots).$$

令

$$T = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B - 2I \end{pmatrix},$$

则

$$\sigma(T) = \{-2\} \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}, \quad \sigma_a(T) = \{-2\} \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}, \quad \sigma_{ab}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}.$$

故 $\sigma_a(T) \setminus \sigma_{ab}(T) = \{-2\} \subseteq \pi_{00}(T)$, 即 T 有 (R_1) 性质, 但对多项式 $p(x) = x(x + 2)$, $p_0(T) = T(T + 2I)$, 容易看出 $0 \in \sigma_a(p_0(T)) \setminus \sigma_{ab}(p_0(T))$, 但是 $p_0(T)$ 不是 Browder 算子, 即 $p_0(T)$ 不满足 (R_1) 性质。

定理2 设 $T \in B(H)$, 则任给多项式 p , $p(T)$ 有 (R_1) 性质的充要条件是

- (i) T 有 (R_1) 性质;
- (ii) 若 $\sigma_0(T) \neq \emptyset$, 则 $\sigma(T) = \sigma_a(T)$.

证明 必要性。结论(i)显然成立。下证结论(ii)成立。若结论(ii)不成立, 因 $\sigma_0(T) \neq \emptyset$, 故存在 $\lambda_1 \in \sigma_0(T)$, $\lambda_2 \in \sigma(T) \setminus \sigma_a(T)$. 令 $p_0(T) = (T - \lambda_1 I)(T - \lambda_2 I)$, 则 $0 < n(p_0(T)) < +\infty$ 且 $0 \in \rho_{ab}(p_0(T))$, 于是 $0 \in \sigma_a(p_0(T)) \setminus \sigma_{ab}(p_0(T))$. 由于 $p_0(T)$ 有 (R_1) 性质, 则 $p_0(T)$ 为 Browder 算子, 从而 $T - \lambda_2 I$ 是 Browder 算子, 于是 $n(T - \lambda_2 I) = d(T - \lambda_2 I) = 0$, 即 $T - \lambda_2 I$ 为可逆算子, 这与 $\lambda_2 \in \sigma(T) \setminus \sigma_a(T)$ 矛盾。因此结论(ii)成立。

充分性。设 $\sigma_0(T) \neq \emptyset$. 由 T 有 (R_1) 性质知 $\sigma_a(T) \setminus \sigma_{ab}(T) \subseteq \sigma_0(T) = \emptyset$, 从而 $\sigma_a(T) = \sigma_{ab}(T)$. 我们知道逼近点谱和 Browder 本质逼近点谱都满足谱映射定理, 于是任给多项式 p , 都有 $\sigma_a(p(T)) = p(\sigma_a(T)) = p(\sigma_{ab}(T)) = \sigma_{ab}(p(T))$, 即 $\sigma_a(p(T)) \setminus \sigma_{ab}(p(T)) = \emptyset \subseteq \pi_{00}(p(T))$, 故 $p(T)$ 有 (R_1) 性质。此时 $\sigma(T) =$

$\sigma_a(T)$. 任给多项式 p , 设 $\mu_0 \in \sigma_a(p(T)) \setminus \sigma_{ab}(p(T))$ 且 $p(x) - \mu_0 = a(x - \lambda_1)^{n_1}(x - \lambda_2)^{n_2} \cdots (x - \lambda_k)^{n_k}$, 其中 $\lambda_i \neq \lambda_j$ ($i \neq j$), 于是

$$p(T) - \mu_0 I = a(T - \lambda_1 I)^{n_1}(T - \lambda_2 I)^{n_2} \cdots (T - \lambda_k I)^{n_k}$$

则 $T - \lambda_i I$ 为上半 Fredholm 且 $\text{asc}(T - \lambda_i I) < +\infty$, $1 \leq i \leq k$. 所以 $\lambda_i \in \rho_a(T) \cup [\sigma_a(T) \setminus \sigma_{ab}(T)]$. 由于 $\sigma(T) = \sigma_a(T)$, 我们不妨假设 $\lambda_i \in \sigma_a(T) \setminus \sigma_{ab}(T)$, $1 \leq i \leq k$. 由 T 有 (R_1) 性质可得 $\lambda_i \in \sigma_0(T)$, $1 \leq i \leq k$. 于是 $p(T) - \mu_0 I$ 为 Browder 算子, 即 $\mu_0 \in \pi_{00}(p(T))$. 这样我们就证明了 $p(T)$ 满足 (R_1) 性质。证毕

对算子 $T \in B(H)$, $\sigma(T) = \sigma_a(T)$ 当且仅当 $\sigma_b(T) = \sigma_\tau(T) \cup \text{acc } \sigma_a(T) \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : n(T - \lambda I) = +\infty\}$, 于是有:

推论 4 设 $T \in B(H)$. 则对任给多项式 p , $p(T)$ 有 (R_1) 性质的充要条件是

(i) T 有 (R_1) 性质;

(ii) 若 $\sigma_0(T) \neq \emptyset$, 则 $\sigma_b(T) = \sigma_\tau(T) \cup \text{acc } \sigma_a(T) \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : n(T - \lambda I) = +\infty\}$.

由推论 3 及推论 4 可知:

推论 5 设 $T \in B(H)$. 若 $\sigma_b(T) = \sigma_\tau(T) \cup \text{acc } \sigma_a(T) \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : n(T - \lambda I) = +\infty\}$, 则对任意多项式 p , $p(T)$ 有 (R_1) 性质。

在推论 5 中, 反之不成立。例如: 设算子 $T \in B(\ell^2)$ 定义为

$$T(x_1, x_2, x_3, \cdots) = (0, x_1, x_2, x_3, \cdots).$$

由定理 2 可知任给多项式 p , $p(T)$ 有 (R_1) 性质。但是通过计算可知 $\sigma_b(T) \neq \sigma_\tau(T) \cup \text{acc } \sigma_a(T) \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : n(T - \lambda I) = +\infty\}$.

推论 6 设 $T \in B(H)$. 若 $\sigma_0(T) \neq \emptyset$, 则任意多项式 p , $p(T)$ 有 (R_1) 性质当且仅当 $\sigma_b(T) = \sigma_\tau(T) \cup \text{acc } \sigma_a(T) \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : n(T - \lambda I) = +\infty\}$.

根据定理 2 的证明容易看出, 当 $\sigma_0(T) = \emptyset$ 时, 对任意多项式 p , $p(T)$ 有 (R_1) 性质当且仅当 T 有 (R_1) 性质。

3 上三角算子矩阵的 (R_1) 性质的稳定性

下面设 H, K 为两个无限维复可分 Hilbert 空间, $B(K, H)$ 为从 K 到 H 上的有界线性算子全体。再设 $A \in B(K), N \subseteq K$ 为 A 的不变子空间, 则 A 可分解成上三角算子矩阵

$$A = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}: N \oplus N^\perp \rightarrow N \oplus N^\perp.$$

近年来许多学者研究过上三角算子矩阵的 Weyl 型定理及其变化性质^[10-14]。接下来我们研究上三角算子矩阵的 (R_1) 性质。

设 $A \in B(H), B \in B(K)$, 记

$$M_C = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

其中 $C \in B(K, H)$. 可以证明: 当 A 和 B 升标有限时, 对任意 $C \in B(K, H)$, M_C 的升标都有限; 反之, 当 M_C 升标有限时, A 的升标也一定有限。

称 $T \in B(H)$ 有 (R_1) 性质的稳定性, 如果任给紧算子 K , $T + K$ 都有 (R_1) 性质。

由文献[7]中定理 1.1 的证明可以看出下列事实:

引理 2 设 $T \in B(H)$. 则 T 有 (R_1) 性质的稳定性当且仅当 $\rho_{SF}^-(T) = \emptyset$. 其中 $\rho_{SF}^-(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ 为半 Fredholm 算子且 } \text{ind}(T - \lambda I) < 0\}$.

设 $T \in B(H)$ 有 (R_1) 性质的稳定性, 则 $\rho_{SF}^-(T) = \emptyset$. 对任意的多项式 p , 由于 $\rho_{SF}^-(p(T)) \subseteq p(\rho_{SF}^-(T))$, 于是 $\rho_{SF}^-(p(T)) = \emptyset$. 这样就有下列结论:

推论 7 设 $T \in B(H)$. 则 T 有 (R_1) 性质的稳定性当且仅当对任意多项式 p , $p(T)$ 有 (R_1) 性质的稳定性。

为了研究上三角算子矩阵的 (R_1) 性质的稳定性, 我们先看下列一个事实:

引理 3 设 $A \in B(H)$, $B \in B(K)$. 若 A 是上半 Fredholm 算子且 $d(A) = +\infty$, 则存在 $C \in B(K, H)$, 使得

$$M_c = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

是上半 Fredholm 算子且 $\text{ind}(M_c) < 0$.

证明 若 B 是上半 Fredholm 算子, 则任给 $C \in B(K, H)$, M_c 均为上半 Fredholm 算子且 $\text{ind}(M_c) = \text{ind}(A) + \text{ind}(B) = -\infty < 0$. 若 $R(B)$ 不为闭集, 由文献[15]中定理 2.2 知, 存在 $C \in B(K, H)$, 使得

$$M_c = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

是上半 Fredholm 算子。由于 B 不为下半 Fredholm 算子, 则由

$$M_c - \lambda_0 I = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & C \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

知 M_c 不为 Fredholm 算子, 故 $\text{ind}(M_c) = -\infty < 0$. 若 $R(B)$ 为闭集, $n(B) = d(B) = +\infty$, 仍由文献[15]定理 2.2 知存在 $C \in B(K, H)$, 使得 M_c 是上半 Fredholm 算子, 且 $\text{ind}(M_c) = -\infty < 0$.

下设 $R(B)$ 为闭集, $n(B) = +\infty$, $d(B) < +\infty$.

由 B 是下半 Fredholm 算子知由 B 不是紧算子, 故其共轭算子 B^* 不是紧算子, 于是 $\dim N(B)^\perp = \dim R(B^*) = +\infty$. 设 $n(A) = N$, 取 $\{e_1, e_2, \dots, e_{N+1}\}$ 为 $N(B)^\perp = R(B^*)$ 中 $N+1$ 个正规正交集。令 $M = \text{span}\{e_1, e_2, \dots, e_{N+1}\}$. 由于 $\dim(N(B) + M) = \dim R(A)^\perp = d(A) = +\infty$ 知, 存在等距同构映射

$$J: N(B) + M \rightarrow R(A)^\perp.$$

令

$$C = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}: \begin{pmatrix} N(B) + M \\ (N(B) + M)^\perp \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} R(A)^\perp \\ R(A) \end{pmatrix}.$$

下证 M_c 是上半 Fredholm 算子且 $\text{ind}(M_c) < 0$.

(i) $n(M_c) = N$. 设

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in N(M_c),$$

则

$$\begin{cases} Au + Cv = 0, \\ Bv = 0. \end{cases}$$

由 $v \in N(B)$ 知 $Cv = Jv$, 故由 $Au = -Cv = -Jv \in R(A)^\perp \cap R(A)$ 知 $Au = 0, Jv = 0$. 而 J 可逆, 故 $v = 0$, 于是 $N(M_c) \subseteq N(A) \oplus \{0\}$. 又 $N(A) \oplus \{0\} \subseteq N(M_c)$, 所以 $N(M_c) = N(A) \oplus \{0\}$, 从而 $n(M_c) = N < +\infty$.

(ii) $R(M_c)$ 闭. 设

$$M_c \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix},$$

即

$$\begin{cases} Au_n + Cv_n \rightarrow u_0, \\ Bv_n \rightarrow v_0, \end{cases} \quad (n \rightarrow \infty).$$

设 $v_n = \alpha_n + \beta_n$, 其中 $\alpha_n \in N(B) + M, \beta_n \in [N(B) + M]^\perp$. 由 $Au_n \in R(A), Cv_n \in R(A)^\perp$ 知 $\{Au_n\}, \{Cv_n\}$ 均为 Cauchy 列。而 $Cv_n = J\alpha_n, J$ 可逆, 故 $\{\alpha_n\}$ 为 Cauchy 列。于是由 $B\beta_n = Bv_n - B\alpha_n$ 知 $\{B\beta_n\}$ 为 Cauchy 列。又 $\beta_n \in [N(B) + M]^\perp \subseteq N(B)^\perp$, 故 $\{\beta_n\}$ 为 Cauchy 列。从而 $\{v_n\}$ 为 Cauchy 列。设 $v_n \rightarrow y_0 (n \rightarrow \infty)$. 由 $R(A)$ 闭知存在 $x_0 \in H$ 使得 $Au_n \rightarrow Ax_0 (n \rightarrow \infty)$, 故

$$M_c \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} Ax_0 + Cy_0 \\ By_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = M_c \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix},$$

所以 $R(M_c)$ 闭。

(iii) $n(M_c^*) = N + 1$. 设

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}; 1 \leq n \leq k \right\} \subseteq N(M_C^*)$$

为正规正交集, 则

$$\begin{cases} A^*x_n = 0, \\ C^*x_n + B^*y_n = 0. \end{cases}$$

所以 $x_n \in N(A^*) = R(A)^\perp, C^*x_n \in N(B) + M$, 于是 $C^*x_n = -B^*y_n \in [N(B) + M] \cap N(B)^\perp = M$. 由 $C^*x_n = J^*x_n$ 及 J^* 单知 $k \leq N + 1$, 于是 $n(M_C^*) \leq N + 1$. 令 $J^*u_n = e_n = B^*v_n, u_n \in R(A)^\perp = N(A^*)$, 则

$$\begin{pmatrix} u_n \\ -v_n \end{pmatrix} \in N(M_C^*).$$

由 J^* 可逆及 $\{e_n\}$ 线性无关知

$$\begin{pmatrix} u_n \\ -v_n \end{pmatrix}$$

线性无关, 故 $n(M_C^*) \geq N + 1$, 于是 $n(M_C^*) = N + 1 = d(M_C)$.

由上证明知 M_C 是上半 Fredholm 算子且 $\text{ind}(M_C) = -1 < 0$.

证毕

定理 3 设 $A \in B(H), B \in B(K)$ 给定, 则任给 $C \in B(K, H), M_C = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ 有 (R_1) 性质的稳定性的充要条件是

(i) $M_0 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ 有 (R_1) 性质的稳定性;

(ii) $\{\lambda \in \mathbb{C} : A - \lambda I \text{ 是上半 Fredholm 算子, } d(A - \lambda I) = +\infty\} = \emptyset$, 即 $\sigma_{SF^+}(A) = \sigma_e(A)$, 其中 $\sigma_{SF^+}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ 不为上半 Fredholm 算子}\}$.

证明 必要性。(i) 显然成立。由引理 2 和引理 3 可知 (ii) 成立。

充分性。由引理 3, 只需要证明对任意的 $C \in B(K, H), \rho_{SF^-}(M_C) = \emptyset$ 即可。反证法, 若不然, 设 $\lambda_0 \in \rho_{SF^-}(M_C)$, 由

$$M_C - \lambda_0 I = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & B - \lambda_0 I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & C \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A - \lambda_0 I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

知 $A - \lambda_0 I$ 为上半 Fredholm 算子。由条件 (ii) 可知, $d(A - \lambda_0 I) < +\infty$, 即 $A - \lambda_0 I$ 为 Fredholm 算子。再次由上面的分解知 $B - \lambda_0 I$ 为上半 Fredholm 算子。于是 $M_0 - \lambda_0 I$ 为上半 Fredholm 算子且 $\text{ind}(M_0 - \lambda_0 I) = \text{ind}(A - \lambda_0 I) + \text{ind}(B - \lambda_0 I) = \text{ind}(M_C - \lambda_0 I) < 0$, 即 $\lambda_0 \in \rho_{SF^-}(M_0)$, 这就与 M_0 满足 (R_1) 性质的稳定矛盾。

证毕

从定理 3 的证明可以看出下列事实: 设 $A \in B(H), B \in B(K)$ 给定。则任给 $C \in B(K, H), M_C = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ 有 (R_1) 性质的稳定性当且仅当

(i) 存在 $C_0 \in B(K, H), M_{C_0} = \begin{pmatrix} A & C_0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ 有 (R_1) 性质的稳定性;

(ii) $\{\lambda \in \mathbb{C} : A - \lambda I \text{ 是上半 Fredholm 算子, } d(A - \lambda I) = +\infty\} = \emptyset$, 即 $\sigma_{SF^+}(A) = \sigma_e(A)$.

例 1 设 $A, B \in B(\ell^2)$ 定义为

$$A(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, x_4, \dots), \quad B(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, x_3, \dots).$$

通过计算可知

(i) $M_0 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ 有 (R_1) 性质的稳定性;

(ii) $\{\lambda \in \mathbb{C} : A - \lambda I \text{ 是上半 Fredholm 算子, } d(A - \lambda I) = +\infty\} = \emptyset$, 即 $\sigma_{SF^+}(A) = \sigma_e(A)$.

于是由定理 3, 任给 $C \in B(\ell^2, \ell^2), M_C$ 均满足 (R_1) 性质的稳定性。

参考文献:

- [1] WEYL H V. Über beschränkte quadratische formen, deren differenz vollstetig ist [J]. Rend Circ Mat Palermo, 1909, 27(1): 373–392.
- [2] HARTE R, LEE W Y. Another note on Weyl's theorem [J]. Trans Amer Math Soc, 1997, 349(5): 2115–2124.
- [3] RAKOCEVIC V. Operators obeying a-Weyl's theorem [J]. Rev Roumaine Math Pures Appl, 1986, 34(10): 915–919.
- [4] RAKOCEVIC V. On a class of operators [J]. Mat Vesnik, 1985, 37(92): 423–425.
- [5] AIENA P, GUILLÉN J R, PEÑA P. Property (R) for bounded linear operators [J]. Mediterr J Math, 2011, 8(4): 491–508.
- [6] AIENA P, APONTE E, GUILLÉN J R, et al. Property (R) under perturbations [J]. Mediterr J Math, 2013, 10(1): 367–382.
- [7] JIA B T, FENG Y L. Property (R) under compact perturbations [J]. Mediterr J Math, 2020, 17(2): 73.
- [8] 赵小鹏, 戴磊, 曹小红. 有界线性算子的拓扑一致降标与 (R) 性质 [J]. 山东大学学报(理学版), 2021, 56(12): 59–66.
- [9] GRABINER S. Uniform ascent and descent of bounded operators [J]. J Math Soc Japan, 1982, 34(2): 317–337.
- [10] DONG J, CAO X H. Compact perturbations of both SVEP and Weyl's theorem for 3×3 upper triangular operator matrices [J]. Linear Multilinear Algebra, 2020, 68(10): 2020–2033.
- [11] DONG J, CAO X H. The (generalized) Weylness of upper triangular operator matrices [J]. Anal Math, 2020, 46(3): 465–481.
- [12] CUI M M, CAO X H. Weyl's theorem for upper triangular operator matrix and perturbations [J]. Linear Multilinear Algebra, 2018, 66(7): 1299–1310.
- [13] 吴学俐, 曹小红, 张敏. 上三角算子矩阵的 (ω) 性质的摄动[J]. 西北大学学报(自然科学版), 2017, 47(2): 167–173.
- [14] 闫慧凰, 曹小红. 有界线性算子及其函数演算的Weyl定理[J]. 中山大学学报(自然科学版), 2020, 59(2): 22–27.
- [15] CAO X H, GUO M Z, MENG B. Semi-Fredholm spectrum and Weyl's theorem for operator matrices [J]. Acta Math Sin (Engl Ser), 2006, 22(1): 169–178.

(责任编辑 冯兆永)